1章 方程式・式と証明

Readiness check レディネスチェック

1

(1) $(4x+1)^2$ 　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$=(4x)^2+2\cdot4x\cdot1+1^2$

$=16x^2+8x+1$

(2) $(3x-2y)^2$ 　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=(3x)^2-2\cdot3x\cdot2y+(2y)^2$

$=9x^2-12xy+4y^2$

(3) $(x+2y)(x-2y)$ 　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$=x^2-(2y)^2$

$=x^2-4y^2$

(4) $(x+3)(x-5)$ 　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$=x^2+(3-5)x+3\cdot(-5)$

$=x^2-2x-15$

(5) $(x-3)(x-4)$

$=x^2+(-3-4)x+(-3)\cdot(-4)$

$=x^2-7x+12$

(6) $(3x+4)(2x-1)$

$=3\cdot2x^2+\{3\cdot(-1)+4\cdot2\}x+4\cdot(-1)$

$=6x^2+5x-4$ 　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(7) $(3x+2y)(4x-7y)$

$=3\cdot4x^2+\{3\cdot(-7y)+2y\cdot4\}x+2y\cdot(-7y)$

$=12x^2-13xy-14y^2$

(8) $(5x-3y)(3x-4y)$

$=5\cdot3x^2+\{5\cdot(-4y)+(-3y)\cdot3\}x+(-3y)\cdot(-4y)$

$=15x^2-29xy+12y^2$

2

(1) $a+b=A$ とおくと 　共通部分を文字に置き換えて簡単にする

$(a+b+5)(a+b-3)$

$=(A+5)(A-3)$

$=A^2+2A-15$ 　置き換えた文字をもとに戻す

$=(a+b)^2+2(a+b)-15$

$=a^2+2ab+b^2+2a+2b-15$

(2) $3x+y=A$ とおくと

$(3x+y+z)(3x+y-z)$

$=(A+z)(A-z)$

$=A^2-z^2$

$=(3x+y)^2-z^2$

$=9x^2+6xy+y^2-z^2$

(3) $2a-5=A$ とおくと

$(2a+3b-5)(2a+b-5)$

$=(2a-5+3b)(2a-5+b)$

$=(A+3b)(A+b)$

$=A^2+4Ab+3b^2$

$=(2a-5)^2+4(2a-5)b+3b^2$

$=4a^2-20a+25+8ab-20b+3b^2$

(4) $y-3z=A$ とおくと

$(2x-y+3z)(2x+y-3z)$ 　$-y+3z=-(y-3z)$

$=(2x-A)(2x+A)$

$=4x^2-A^2$

$=4x^2-(y-3z)^2$

$=4x^2-(y^2-6yz+9z^2)$

$=4x^2-y^2+6yz-9z^2$

(5) $(a+b-2c)^2$ 　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=a^2+b^2+(-2c)^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot(-2c)+2\cdot(-2c)\cdot a$

$=a^2+b^2+4c^2+2ab-4bc-4ca$

(6) $(2x-3y-z)^2$

$=(2x)^2+(-3y)^2+(-z)^2+2\cdot2x\cdot(-3y)+2\cdot(-3y)\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot2x$

$=4x^2+9y^2+z^2-12xy+6yz-4zx$

3

(1) x^2+6x+9 　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$=x^2+2\cdot x\cdot3+3^2$

$=(x+3)^2$

(2) $x^2-8xy+16y^2$ 　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$=x^2-2\cdot x\cdot4y+(4y)^2$

$=(x-4y)^2$

(3) $9x^2-49y^2$ 　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$=(3x)^2-(7y)^2$

$=(3x+7y)(3x-7y)$

(4) x^2-x-20 　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$=x^2+(4-5)x+4\cdot(-5)$

$=(x+4)(x-5)$

(5) $x^2+7xy+10y^2$

$=x^2+(2y+5y)x+2y\cdot5y$

$=(x+2y)(x+5y)$

(6) $21x^2-26x+8$ 　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

$=(3x-2)(7x-4)$

$$\begin{array}{ccc} 3 & -2 & \longrightarrow -14 \\ 7 & -4 & \longrightarrow -12 \\ \hline & & -26 \end{array}$$

(7) $4x^2-16xy+15y^2$

$=(2x-5y)(2x-3y)$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -5y & \longrightarrow -10y \\ 2 & -3y & \longrightarrow -6y \\ \hline & & -16y \end{array}$$

(8) $8x^2-22xy-21y^2$

$=(4x+3y)(2x-7y)$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3y & \longrightarrow 6y \\ 2 & -7y & \longrightarrow -28y \\ \hline & & -22y \end{array}$$

4

(1) $a-3=A$ とおくと 　共通部分を文字に置き換えて共通因数でくくる

$b(a-3)+a-3$

$=b\cdot A+1\cdot A$

$=A(b+1)$ 　置き換えた文字をもとに戻す

$=(a-3)(b+1)$

(2) $2y-5=A$ とおくと

$x(2y-5)-2(5-2y)$ 　$-2(5-2y)=2(2y-5)$

$=x(2y-5)+2(2y-5)$

$=xA+2A$

$=A(x+2)$

$=(x+2)(2y-5)$

(3) $2x+y=A$ とおくと

$2(2x+y)^2-7(2x+y)+3$

$=2A^2-7A+3$

$=(A-3)(2A-1)$

$=(2x+y-3)\{2(2x+y)-1\}$

$=(2x+y-3)(4x+2y-1)$

(4) $x-y=A$ とおくと

$3(x-y)^2-x+y-4$ 　$-x+y=-(x-y)$

$=3(x-y)^2-(x-y)-4$

$=3A^2-A-4$

$=(3A-4)(A+1)$

$=\{3(x-y)-4\}(x-y+1)$

$=(3x-3y-4)(x-y+1)$

(5) $2x+xy+y^2-3y-10$ 　最も次数の低い文字について整理する

$=(y+2)x+(y^2-3y-10)$

$=(y+2)x+(y+2)(y-5)$

$=(y+2)(x+y-5)$

(6) $x^2+2xy+6y-9$

$=2(x+3)y+(x^2-9)$

$=2(x+3)y+(x+3)(x-3)$

$=(x+3)(x+2y-3)$

(7) $x^2+5xy+6y^2-x-5y-6$

$=x^2+(5y-1)x+(6y^2-5y-6)$

$=x^2+(5y-1)x+(2y-3)(3y+2)$

$=\{x+(2y-3)\}\{x+(3y+2)\}$

$=(x+2y-3)(x+3y+2)$ 　1つの文字について整理する

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2y-3 & \longrightarrow 2y-3 \\ 1 & 3y+2 & \longrightarrow 3y+2 \\ \hline & & 5y-1 \end{array}$$

(8) $2x^2+3xy-2y^2-5x-5y+3$

$=2x^2+(3y-5)x-(2y^2+5y-3)$

$=2x^2+(3y-5)x-(2y-1)(y+3)$

$=\{2x-(y+3)\}\{x+(2y-1)\}$

$=(2x-y-3)(x+2y-1)$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -(y+3) & \longrightarrow -y-3 \\ 1 & 2y-1 & \longrightarrow 4y-2 \\ \hline & & 3y-5 \end{array}$$

5

(1) $\sqrt{7}\times\sqrt{4}\times\sqrt{28}$ 　$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$=\sqrt{7\times4\times28}$

$=\sqrt{4^2\times7^2}$ 　$\sqrt{m^2}=m\ (m>0)$

$=4\times7$

$=28$

(2) $\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{7}}$ 　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$=\sqrt{\dfrac{56}{7}}$

$=\sqrt{8}$

$= \sqrt{2^2 \times 2}$ ← $\sqrt{m^2 a} = \sqrt{m^2}\sqrt{a} = m\sqrt{a}$ $(m>0)$

$= \mathbf{2\sqrt{2}}$

(3) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$

$= \sqrt{2^2\times 5}+\sqrt{3^2\times 5}-\sqrt{4^2\times 5}$

$= 2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-4\sqrt{5}$

$= (2+3-4)\sqrt{5}$

$= \mathbf{\sqrt{5}}$

(4) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$ ← $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$= (\sqrt{5})^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$

$= 5-2\sqrt{15}+3$

$= \mathbf{8-2\sqrt{15}}$

(5) $(2\sqrt{6}+\sqrt{2})(2\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ← $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

$= (2\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2$

$= 24-2$

$= \mathbf{22}$

(6) $(3\sqrt{3}-\sqrt{2})(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

$= 3\sqrt{3}(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})-\sqrt{2}(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

$= 36+9\sqrt{6}-4\sqrt{6}-6$

$= \mathbf{30+5\sqrt{6}}$

6

(1) $\dfrac{6}{\sqrt{27}}$

$= \dfrac{6}{3\sqrt{3}}$ ← 分母と分子に $\sqrt{3}$ を掛けて，分母を有理化する

$= \dfrac{6\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$= \dfrac{6\sqrt{3}}{9}$

$= \mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$= \mathbf{\dfrac{\sqrt{15}}{10}}$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$ ← 分母と分子に $\sqrt{5}+1$ を掛けて，分母を有理化する

$= \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$= \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}$

$= \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}$

$= \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{4}$

$= \mathbf{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$

(4) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

$= \dfrac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}$

$= \dfrac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3}$

$= \dfrac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}$

$= \mathbf{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

(5) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$= \dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$

$= \dfrac{(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$

$= \dfrac{5+2\sqrt{10}+2}{5-2}$

$= \mathbf{\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}}$

(6) $\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(\sqrt{7}+2\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$

$= \dfrac{\sqrt{7}(\sqrt{7}-\sqrt{3})+2\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}$

$= \dfrac{7-\sqrt{21}+2\sqrt{21}-6}{7-3}$

$= \mathbf{\dfrac{1+\sqrt{21}}{4}}$

7

(1) $x+y$

$= \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$= \dfrac{2\sqrt{5}}{2}$

$= \mathbf{\sqrt{5}}$

(2) xy

$= \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$= \dfrac{(\sqrt{5})^2-1^2}{4}$

$= \dfrac{5-1}{4}$

$= \mathbf{1}$

(3) x^2+y^2 ← (1), (2) の結果を利用する

$= (x+y)^2-2xy$

$= (\sqrt{5})^2-2\cdot 1$

$= \mathbf{3}$

8

(1) $2x^2-5x-1=0$ ← 解の公式に代入する $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}$

$= \mathbf{\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{4}}$

(2) $x^2-4x+1=0$

$x = \dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$

$= \dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2}$

$= \dfrac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}$

$= \mathbf{2\pm\sqrt{3}}$

(3) $3x^2+4x-2=0$

$x = \dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}$

$= \dfrac{-4\pm\sqrt{40}}{6}$

$= \dfrac{-4\pm 2\sqrt{10}}{6}$

$= \mathbf{\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{3}}$

(4) $2x^2-3x-3=0$

$x = \dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}$

$= \mathbf{\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{4}}$

Point 1 判別式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数は，$D=b^2-4ac$ とおくと
- $D>0$ のとき　2個
- $D=0$ のとき　1個（重解）
- $D<0$ のとき　0個

9

2次方程式の判別式を D とする。

(1) $x^2+3x-3=0$ より ← $D=b^2-4ac$ に代入する

$D = 3^2-4\cdot 1\cdot(-3)$

$= 21>0$

であるから，実数解の個数は **2個**

(2) $-16x^2-8x-1=0$ ← 両辺に -1 を掛ける

$16x^2+8x+1=0$ より

$D = 8^2-4\cdot 16\cdot 1$

$= 0$

であるから，実数解の個数は **1個**

(3) $2x^2+3x-1=0$ より

$D = 3^2-4\cdot 2\cdot(-1)$

$= 17>0$

であるから，実数解の個数は **2個**

(4) $-5x^2+6x-2=0$

$5x^2-6x+2=0$ より

$D = (-6)^2-4\cdot 5\cdot 2$

$= -4<0$

であるから，実数解の個数は **0個**

1節 整式・分数式の計算

1 整式の乗法と因数分解

Training トレーニング

Point 2 3次式の乗法公式

[1] $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
[2] $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
[3] $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
[4] $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

10

(1) $(x-5)^3$ ← Point 2 3次式の乗法公式 [2]
$=x^3-3\cdot x^2\cdot 5+3\cdot x\cdot 5^2-5^3$
$=\boldsymbol{x^3-15x^2+75x-125}$

(2) $(3x+1)^3$ ← Point 2 3次式の乗法公式 [1]
$=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 1+3\cdot 3x\cdot 1^2+1^3$
$=\boldsymbol{27x^3+27x^2+9x+1}$

(3) $(x-2y)^3$
$=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=\boldsymbol{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}$

(4) $(4x+3y)^3$
$=(4x)^3+3\cdot(4x)^2\cdot 3y+3\cdot 4x\cdot(3y)^2+(3y)^3$
$=\boldsymbol{64x^3+144x^2y+108xy^2+27y^3}$

(5) $(6x-5y)^3$
$=(6x)^3-3\cdot(6x)^2\cdot 5y+3\cdot 6x\cdot(5y)^2-(5y)^3$
$=\boldsymbol{216x^3-540x^2y+450xy^2-125y^3}$

(6) $(-5a+3b)^3$
$=(-5a)^3+3\cdot(-5a)^2\cdot 3b$
$\quad+3\cdot(-5a)\cdot(3b)^2+(3b)^3$
$=\boldsymbol{-125a^3+225a^2b-135ab^2+27b^3}$

11

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$ ← Point 2 3次式の乗法公式 [3]
$=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$
$=x^3+2^3$
$=\boldsymbol{x^3+8}$

(2) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$ ← Point 2 3次式の乗法公式 [4]
$=(3x-2)\{(3x)^2+3x\cdot 2+2^2\}$
$=(3x)^3-2^3$
$=\boldsymbol{27x^3-8}$

(3) $(2x+6)(4x^2-12x+36)$
$=(2x+6)\{(2x)^2-2x\cdot 6+6^2\}$
$=(2x)^3+6^3$
$=\boldsymbol{8x^3+216}$

〔別解〕
$(2x+6)(4x^2-12x+36)$
$=8(x+3)(x^2-3x+9)$
$=8(x^3+3^3)$
$=8(x^3+27)$
$=8x^3+216$

(4) $(5x+3y)(25x^2-15xy+9y^2)$
$=(5x+3y)\{(5x)^2-5x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$=(5x)^3+(3y)^3$
$=\boldsymbol{125x^3+27y^3}$

(5) $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$
$=(4x-3y)\{(4x)^2+4x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$=(4x)^3-(3y)^3$
$=\boldsymbol{64x^3-27y^3}$

(6) $(2a-7b)(4a^2+14ab+49b^2)$
$=(2a-7b)\{(2a)^2+2a\cdot 7b+(7b)^2\}$
$=(2a)^3-(7b)^3$
$=\boldsymbol{8a^3-343b^3}$

Point 3 3次式の因数分解の公式

[1] $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
[2] $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
[3] $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
[4] $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

12

(1) x^3-64
$=x^3-4^3$ ← Point 3 3次式の因数分解の公式 [2]
$=(x-4)(x^2+x\cdot 4+4^2)$
$=\boldsymbol{(x-4)(x^2+4x+16)}$

(2) x^3+27
$=x^3+3^3$ ← Point 3 3次式の因数分解の公式 [1]
$=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)$
$=\boldsymbol{(x+3)(x^2-3x+9)}$

(3) $64x^3+216$ ← 公式が使えるように共通因数でくくる
$=8(8x^3+27)$
$=8\{(2x)^3+3^3\}$
$=8(2x+3)\{(2x)^2-2x\cdot 3+3^2\}$
$=\boldsymbol{8(2x+3)(4x^2-6x+9)}$

(4) $8x^3-y^3$
$=(2x)^3-y^3$
$=(2x-y)\{(2x)^2+2x\cdot y+y^2\}$
$=\boldsymbol{(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)}$

(5) $27x^3+125y^3$
$=(3x)^3+(5y)^3$
$=(3x+5y)\{(3x)^2-3x\cdot 5y+(5y)^2\}$
$=\boldsymbol{(3x+5y)(9x^2-15xy+25y^2)}$

(6) $16a^3-128b^3$
$=16(a^3-8b^3)$
$=16\{a^3-(2b)^3\}$
$=16(a-2b)\{a^2+a\cdot 2b+(2b)^2\}$
$=\boldsymbol{16(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)}$

13

(1) $a^3=A$ とおくと
a^6-64 ← 置き換えて次数を低くする
$=A^2-8^2$ ← $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$=(A+8)(A-8)$ ← A をもとに戻す
$=(a^3+8)(a^3-8)$ ← ※1
$=(a+2)(a^2-a\cdot 2+2^2)$
$\quad\times(a-2)(a^2+a\cdot 2+2^2)$
$=\boldsymbol{(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)}$

※1 Point 3 3次式の因数分解の公式 [1]，[2]

(2) $x^3=A$ とおくと
x^6+7x^3-8
$=A^2+7A-8$
$=(A+8)(A-1)$
$=(x^3+8)(x^3-1)$
$=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$
$\quad\times(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)$
$=\boldsymbol{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-2x+4)}$

(3) $x^3=X,\ y^3=Y$ とおくと
$x^6-26x^3y^3-27y^6$
$=X^2-26XY-27Y^2$
$=(X+Y)(X-27Y)$
$=(x^3+y^3)(x^3-27y^3)$
$=(x+y)(x^2-x\cdot y+y^2)$
$\quad\times(x-3y)\{x^2+x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$=\boldsymbol{(x+y)(x-3y)}$
$\quad\boldsymbol{\times(x^2+3xy+9y^2)(x^2-xy+y^2)}$

(4) $x+y=A$ とおくと
$(x+y)^3-1$
$=A^3-1$
$=(A-1)(A^2+A\cdot 1+1^2)$
$=(x+y-1)\{(x+y)^2+(x+y)+1\}$
$=\boldsymbol{(x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)}$

(5) $b-2c=B$ とおくと
$a^3+(b-2c)^3$
$=a^3+B^3$
$=(a+B)(a^2-aB+B^2)$
$=(a+b-2c)\{a^2-a(b-2c)+(b-2c)^2\}$
$=\boldsymbol{(a+b-2c)}$
$\quad\boldsymbol{\times(a^2+b^2+4c^2-ab-4bc+2ca)}$

(6) $a+b=A,\ a-b=B$ とおくと
$(a+b)^3-(a-b)^3$
$=A^3-B^3$
$=(A-B)(A^2+AB+B^2)$
$=\{(a+b)-(a-b)\}$
$\quad\times\{(a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a-b)^2\}$
$=\boldsymbol{2b(3a^2+b^2)}$

〔別解〕
$(a+b)^3-(a-b)^3$ ← Point 2 3次式の乗法公式 [1]，[2]
$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$
$\quad-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$
$=6a^2b+2b^3$
$=2b(3a^2+b^2)$

[Level Up] レベルアップ

14

考え方 3次の乗法公式が使えるように，展開する式の組み合わせを工夫する。

(1) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2$ ← $A^2B^2=(AB)^2$
$=\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}^2$ ← Point 2 3次式の乗法公式 [3]
$=(a^3+b^3)^2$
$=(a^3)^2+2\cdot a^3\cdot b^3+(b^3)^2$ ← 指数法則 $(a^m)^n=a^{mn}$
$=\boldsymbol{a^6+2a^3b^3+b^6}$

(2) $(2x+3)^3(2x-3)^3$ ← $A^3B^3=(AB)^3$
$=\{(2x+3)(2x-3)\}^3$
$=(4x^2-9)^3$ ← Point 2 3次式の乗法公式 [2]

$= (4x^2)^3 - 3\cdot(4x^2)^2\cdot 9$

$\quad + 3\cdot 4x^2\cdot 9^2 - 9^3$ ← 指数法則 $(ab)^n = a^n b^n$

$= 4^3\cdot(x^2)^3 - 3\cdot 4^2\cdot(x^2)^2\cdot 9$

$\quad + 3\cdot 4x^2\cdot 9^2 - 9^3$

$= \mathbf{64x^6 - 432x^4 + 972x^2 - 729}$

(3) $2a + b = A$ とおくと

$(2a + b - c)^3$

$= (A - c)^3$ ← Point 2 3 次式の乗法公式 [2]

$= A^3 - 3A^2c + 3Ac^2 - c^3$ ← A を $2a+b$ に戻す

$= (2a+b)^3 - 3(2a+b)^2c$

$\quad + 3(2a+b)c^2 - c^3$

$= (2a)^3 + 3\cdot(2a)^2\cdot b + 3\cdot 2a\cdot b^2 + b^3$

$\quad - 3(4a^2 + 4ab + b^2)c + 6ac^2 + 3bc^2 - c^3$

$= \mathbf{8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 - 12a^2c}$

$\quad \mathbf{- 12abc - 3b^2c + 6ac^2 + 3bc^2 - c^3}$

(4) $(x+y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$= \{(x+y)(x^2 - xy + y^2)\}$

$\quad \times\{(x-y)(x^2 + xy + y^2)\}$

$= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$ ← Point 2 3 次式の乗法公式 [3]，[4]

$= (x^3)^2 - (y^3)^2$

$= \mathbf{x^6 - y^6}$

15

考え方 3 次式の因数分解の公式を用いる。

(1) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$= x^3 - 3\cdot x^2\cdot 1 + 3\cdot x\cdot 1^2 - 1^3$ ← Point 3 3 次式の因数分解の公式 [4]

$= \mathbf{(x-1)^3}$

(2) $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

$= (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\cdot 2 + 3\cdot 3x\cdot 2^2 + 2^3$ ← Point 3 3 次式の因数分解の公式 [3]

$= \mathbf{(3x+2)^3}$

16

考え方 組み合わせを工夫して，3 次式の因数分解の公式が使えるようにする。

(1) $x^4 - xy^3$ ← 共通因数でくくる

$= x(x^3 - y^3)$ ← Point 3 3 次式の因数分解の公式 [1]，[2]

$= \mathbf{x(x-y)(x^2 + xy + y^2)}$

(2) $16x^4 + 2xy^3$

$= 2x(8x^3 + y^3)$

$= \mathbf{2x(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)}$

(3) $x^3 + y^3 + 3y^2 + 3y + 1$ ← Point 3 3 次式の因数分解の公式 [3]

$= x^3 + (y+1)^3$

$= \{x + (y+1)\}\{x^2 - x(y+1) + (y+1)^2\}$

$= \mathbf{(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x + 2y + 1)}$

(4) $x^3 + y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2$

$= x^3 + (y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3)$

$= x^3 + (y+z)^3$

$= \{x + (y+z)\}\{x^2 - x(y+z) + (y+z)^2\}$

$= \mathbf{(x + y + z)}$

$\quad \mathbf{\times(x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2yz - zx)}$

17

考え方 $x+y$，xy の値を求め，その値が使えるように変形する。

$x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$= \dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$= 2 - \sqrt{3}$

$y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

$= \dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$= 2 + \sqrt{3}$

よって

$x + y$

$= (2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})$

$= 4$

xy

$= (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

$= 4 - 3$

$= 1$

(1) $x^3 + y^3$ ← $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ より導かれる

$= (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

$= 4^3 - 3\cdot 1\cdot 4$

$= \mathbf{52}$

(2) $x^6 + y^6$ ← (1) の結果を利用する

$= (x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3$

$= (x^3 + y^3)^2 - 2(xy)^3$

$= 52^2 - 2\cdot 1^3$